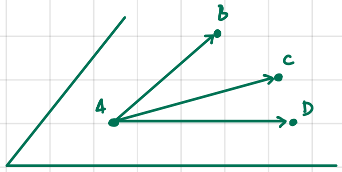
geometría

VECTORES

HALLAR α PARA QUE LOS PUNTOS SEAN COPLANARIOS

$A(0,0,1)$ $\quad B(0,1,2)$ $\quad C(-2,1,3)$ $\quad D(\alpha, \alpha-1, 2)$



A, B, C, D SON COPLANARIOS $\longleftrightarrow$ $rg\left[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}\right]=2 \longleftrightarrow \left|\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}\right| = 0$

1) CALCULAR LOS VECTORES $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$

$\vec{AB} = (0, 1, 1)$

$\vec{AC} = (-2, 1, 2)$

$\vec{AD} = (\alpha, \alpha-1, 1)$

2) CALCULAR EL DETERMINANTE E IGUALAR A CERO

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha-1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \longleftrightarrow 2\alpha - 2(\alpha-1) - (\alpha-2) = 0$$

$$2\alpha - 2\alpha + 2 - \alpha + 2 = 0$$

$$-\alpha + 4 = 0$$

$$\alpha = 4$$

DEMOSTRAR QUE LA BASE FORMADA POR LOS VECTORES $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ ES UNA BASE ORTONORMAL Y HALLAR LAS COORDENADAS DE $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ EN ESA BASE

$\vec{u}_1 = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} \longrightarrow \vec{u}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$

$\vec{u}_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} \longrightarrow u_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

$\vec{u}_3 = \vec{k} \longrightarrow u_3 = (0, 0, 0)$

$B = \{u_1, u_2, u_3\}$ FORMAN UNA BASE ORTONORMAL DE $\mathbb{R}^3$ $\longleftrightarrow$

1) $\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = \|\vec{u}_3\| = 1$ (SON UNITARIOS)

2) $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$, $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = 0$, $\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = 0$ SON ORTOGONALES DOS A DOS

1) VEAMOS SI SON UNITARIOS

$$\|\vec{u}_1\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

$$\|\vec{u}_2\| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

$$\|\vec{u}_3\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

$\vec{u}_1, \vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ SON UNITARIOS

2) VEAMOS SI SON ORTOGONALES DOS A DOS

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} + 0 = 0$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \cdot (0, 0, 1) = 0$$

$$\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \cdot (0, 0, 1) = 0$$

u_1, u_2 y u_3 SON ORTONORMALES DOS A DOS

3) CÁLCULO DE LAS COORDENADAS DE $\vec{v}$ EN $\mathcal{B}$

$$\vec{v} = \underbrace{\alpha \, \vec{u}_1 + \beta \, \vec{u}_2 + \gamma \, \vec{u}_3}_{\text{COORDENADAS DE } \vec{v} \text{ EN } \mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}} \longrightarrow [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = (\vec{v}\cdot\vec{u}_1, \vec{v}\cdot\vec{u}_2, \vec{v}\cdot\vec{u}_3)$$

$$\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = (1, 1, 1)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u}_1 = (1,1,1) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u}_2 = (1,1,1) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 0 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u}_3 = (1,1,1) \cdot (0,0,1) = 0 + 0 + 1 = 1$$

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

HALLA EL ÁREA DEL TRIÁNGULO DE VÉRTICES $A(3,4,0)$, $B(2,-1,-5)$ y $C(-1,1,7)$

$$\vec{AB} = (-1, -5, -5) \qquad A_T = \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right|$$

$$\vec{AC} = (-4, -3, 7)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -5 & -5 \\ -4 & -3 & 7 \end{vmatrix} = -50\vec{i} - 27\vec{j} - 17\vec{k} = (-50, -27, -17)$$

$$\left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right| = \sqrt{(-50)^2 + (-27)^2 + (-17)^2} = 59{,}32 \, (u.a)^2 \longrightarrow \text{ÁREA PARALELOGRAMO}$$

$\llcorner$ unidades de área

$$A_T = \frac{1}{2} \text{ ÁREA PARALELOGRAMO} = \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right| = \frac{1}{2} \cdot 59{,}32 = 29{,}66 \, u^2$$

geometría

VECTORES

@anaMATESonline

HALLA UN VECTOR ORTOGONAL A $\vec{u}=(1,-1,0)$ y a $\vec{v}=(2,0,1)$ CUYO MÓDULO SEA $\sqrt{24}$

1) CÁLCULO DEL VECTOR ORTOGONAL

VECTOR ORTOGONAL A $\vec{u}$ y $\vec{v}$

$$\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=-\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}=(-1,-1,2)$$

2) CÁLCULO DE UN VECTOR UNITARIO DE $\vec{w}$

$$\vec{u}_w=\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}=\frac{(-1,-1,2)}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{(-1,-1,2)}{\sqrt{1+1+4}}=\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

3) CÁLCULO DE UN VECTOR DE MÓDULO $\sqrt{24}$

$$\sqrt{24}\cdot\vec{u}_w=\sqrt{24}\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)=(-2,-2,4)$$

HALLA EL VOLUMEN DEL PARALEPÍPEDO Y DEL TETRAEDRO GENERADO POR LOS VECTORES $\vec{u}=(3,-5,1)$, $\vec{v}=(7,4,2)$ y $\vec{w}=(0,6,1)$

$$\text{VOLUMEN PARALEPÍPEDO}=[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}3 & -5 & 1\\ 7 & 4 & 2\\ 0 & 6 & 1\end{vmatrix}=53\ u^3$$

$$\text{VOLUMEN DEL TETRAEDRO}=\frac{1}{6}[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\frac{1}{6}53=8.83\ u^3$$