

Ejercicio: Encontrar todas las matrices A que sean inversas de ellas mismas

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \quad A = A^{-1}$$

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I \longrightarrow A \cdot A = I \longrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ab+b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ ab+b = 0 \end{cases} \longrightarrow a = \pm \sqrt{1} = \pm 1$$

• si $a = 1 \rightarrow 1 \cdot b + b = 0 \rightarrow 2b = 0 \rightarrow b = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad \text{ya que } I \cdot I = I$$

• si $a = -1 \rightarrow -1 \cdot b + b = 0 \rightarrow -b + b = 0 \rightarrow b \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

COMPROBACIÓN: sea $b = 5 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio: Calcula

$$\begin{vmatrix} k & k & k & 1 \\ k & k & 1 & k \\ k & 1 & k & k \\ 1 & k & k & k \end{vmatrix}$$

Teorema: Si A es una matriz triangular de orden $n \times n$ entonces su determinante es el producto de los elementos diagonales de A

$$\begin{vmatrix} k & k & k & 1 \\ k & k & 1 & k \\ k & 1 & k & k \\ 1 & k & k & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & k & k & 1 \\ k & k & 1 & k \\ k & 1 & k & k \\ 3k+1 & 3k+1 & 3k+1 & 3k+1 \end{vmatrix} = (3k+1) \begin{vmatrix} k & k & k & 1 \\ k & k & 1 & k \\ k & 1 & k & k \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$\downarrow$ $F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \rightarrow F_4$
 $\downarrow$ $F_1 - kF_4 \rightarrow F_1$
 $F_2 - kF_4 \rightarrow F_2$
 $F_3 - kF_4 \rightarrow F_3$

$$= (3k+1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3k+1)(1-k)^3$$

matriz triangular

Ejercicio: Calcula todas las matrices A de orden 2x2 tales que $A^2=I$

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $A^2 = A \cdot A = I \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2+bc=1 \\ ab+bd=0 \\ ca+dc=0 \\ cb+d^2=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} bc=1-a^2 \\ 1-a^2+d^2=1 \\ -a^2+d^2=0 \end{cases} \rightarrow d^2=a^2 \rightarrow \boxed{d=a}$$

$d=a \rightarrow \begin{cases} db+bd=0 \\ 2bd=0 \\ bd=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b=0 \\ d=0 \end{cases}$

• si $b=0 \rightarrow 0+d^2=1 \cdot d=\pm 1 \rightarrow a=\pm 1$

Veamos quien es c: $ca+dc=0$

• si $d=1$ y $a=1 \rightarrow c \cdot 1 + 1 \cdot c = 0 \rightarrow 2c=0 \rightarrow c=0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• si $d=1$ y $a=-1 \rightarrow -c+c=0 \rightarrow \forall c \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

• si $d=-1$ y $a=1 \rightarrow c-c=0 \rightarrow \forall c \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix} \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

• si $d=-1$ y $a=-1 \rightarrow -c-c=0 ; 2c=0 ; c=0$ $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

• si $d=0 \rightarrow a=0 \rightarrow bc=1 \rightarrow \begin{matrix} b=1 \\ c=1 \end{matrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio: Sabiendo que una matriz de orden 5×5 está formada por números de una cifra y que las cinco cifras de cada fila forman números que son todos múltiplos de 2, demuestra que el determinante es múltiplo de 2.

NOTACIÓN: $\dot{2}$ múltiplo de 2

$$\begin{array}{c} \dot{2} \\ \dot{2} \\ \dot{2} \\ \dot{2} \\ \dot{2} \end{array} \leftarrow \begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 & 5 & 25652 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 10002 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 10010 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 10012 \\ 5 & 6 & 3 & 4 & 56342 \end{vmatrix} =$$

$10.000C_1 + 1.000C_2 + 100C_3 + 10C_4 + C_5 \rightarrow C_5$

Desarrollamos por la C_5

$$= \underbrace{25652}_{\dot{2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} - 10002 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 10010 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} - \dots = \dot{2}$$

Un $\dot{2}$ multiplicado por un $\mathbb{Z}$ dará como resultado un $\dot{2}$; y como la suma de $\dot{2}$ también es $\dot{2}$, el determinante dará como resultado un $\dot{2}$

NOTA:

Un determinante formado por números $\mathbb{Z}$ dará como resultado un $\mathbb{Z}$